

2023 年闽南师范大学数学建模竞赛
(请先阅读“闽南师范大学数学建模竞赛论文格式规范”)

B 题 青铜时代

青铜时代处于铜石并用时代之后，早于铁器时代之前，在世界范围内的编年范围大约从公元前 4000 年至公元初年。世界各地进入这一时代的年代有早有晚。伊朗南部、美索不达米亚一带在公元前 4000~前 3000 年已使用青铜器，欧洲在公元前 4000~前 3000 年、印度和埃及在公元前 3000~前 2000 年，也有了青铜器。埃及、北非以外的非洲使用青铜较晚，大约不晚于公元前 1000 年~公元初年。美洲直到将近公元 11 世纪，才出现冶铜中心。

在青铜时代，世界上青铜铸造业形成几个重要的地区，这些地区成了人类古代文明形成的中心。青铜器在人们的生产、生活中占据重要地位。

青铜时代是以使用青铜器为标志的人类物质文化发展阶段。青铜是红铜（纯铜）与锡或铅的合金，因埋在土里后颜色因氧化而青灰，故名青铜。青铜可以制作生活、祭祀用器皿、物件，也可以制作兵器。自有了青铜器和随之的增加，农业和手工业的生产力水平提高，物质生活条件也渐渐丰富，对提高社会生产力起了划时代的作用，同时各地也出现了为青铜而引发的战争，即所谓的青铜之战。

图1是青铜时代区域人口分布图，每个方形代表一个部落，里面的数字代表该部落人口（千人），部落与部落之间的黑线代表有道路连接。蓝色区域属于“沧海王国”，绿色区域属于“桑海王国”，红色区域属于“加纳王国”。

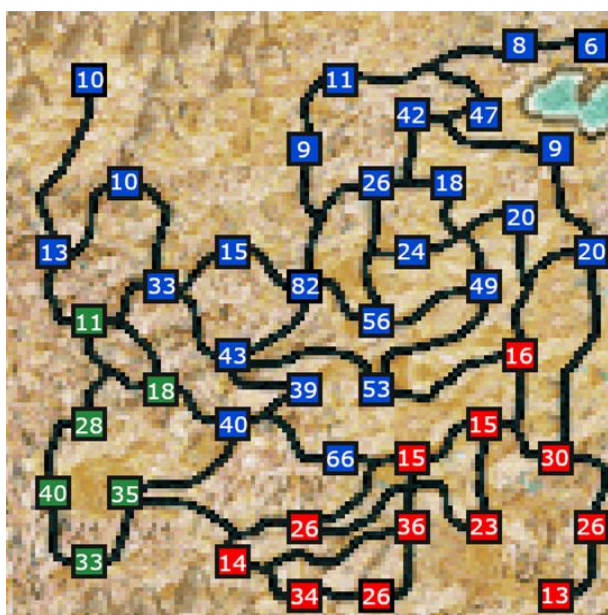


图 1: 青铜时代区域及人口分布

假定你是一个青铜时代的具有青铜冶炼技术的人，想生产并售卖青铜器（为简单，所有青铜产品不区分产品类型，单位统一为件）赚钱。你想不断选择部落作为青铜器生产点，每个生产点的初始投资费用为 2000 钱币，建设时间需要 1 个季度，从下一个季度开始每季度每个生产点最多能制造出 100 件青铜器，每件青铜器的制造成本为 5 钱币。

你可以对青铜器统一定价 P ，一旦定了就不可改变，且每个部落每季度的最大需求量 Q 为：

$$Q = C \frac{N}{P},$$

其中， N 为人口数 (千)， P 为定价， C 为常数。

只要部落与部落之间有路，每段路每件青铜器配送成本为 1 钱币。当路的两边为不同国家时，这段路每件青铜器的配送成本增加 1 钱币。初始你有现金 6000 钱币。考虑下列问题：

1. 讨论 C 在不同的取值范围中，初始时刻应如何投资选择生产点地址，使得运输成本最低。
2. 投入生产一段时间后，为了扩大市场，你计划新增生产点，试讨论 C 在不同的取值范围中，应如何选择新增生产点地址。
3. 综合上述两个问题，讨论参数 C 的不同取值范围与你相对应的投资选点、生产、运输、定价计划，使得 3 年后最终钱币最多。（假设国家间的地盘没有发生变化，且钱币统一管理）
4. 如果相邻 2 个对立部落（属于不同国家且有路相连），一个部落的青铜器当季度需求 100% 得到满足，另一个部落满足量不大于 50%，则满足需求的部落必然发动战争（否则不会发生战争），如果对于同一个部落同时有多个相邻部落满足发动条件，则人口多的部落会发动战争。战争会持续 2 个季度，期间 2 部落所属国之间的运输道路会全部中断，这 2 个对立部落的青铜器最大需求量都会增加 50%，这段时间如果发动战争的部落青铜器最大需求量连续得到 100% 满足，被攻方的最大需求量满足率连续不大于 50%，则进攻方必然占领被攻方的部落，你在该部落的青铜器生产点也会因战败而导致毁坏。如果不满足条件，则一定打平，地盘不发生变化。假设初始你还是有现金 6000 钱币，讨论 C 的不同取值范围与你相对应的投资选点、生产、运输、定价计划，使得某国打败其他两国最快实现全部统一。